



## Teaching Material for Geometry of Space using GeoGebra

---

Ana Elena Gruszycki, Patricia Mónica Maras,  
Pedro Daniel Leguiza and Nori Cheeín de Auat

EasyChair preprints are intended for rapid dissemination of research results and are integrated with the rest of EasyChair.

September 1, 2020

## Material Didáctico de Geometría del Espacio con GeoGebra

Ana E. Gruszycki<sup>1</sup>, Mónica P. Maras<sup>1</sup>, Pedro D. Leguiza<sup>1</sup>, Nori Cheeín de Auat<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Instituto GeoGebra Chaco, Universidad Nacional del Chaco Austral

{ana, pmaras, dleguiza}@uncaus.edu.ar

<sup>2</sup>Universidad Nacional de Santiago del Estero

ncheein@unse.edu.ar

**Resumen.** El siguiente trabajo está basado en un proyecto de investigación cuyo objetivo es contribuir a la aprehensión conceptual de Geometría del Espacio mediante la coordinación entre los diferentes registros de representación de un mismo objeto matemático. Dicho objetivo se persigue a través del diseño, aplicación y evaluación de secuencias didácticas utilizando el software dinámico GeoGebra. En el proceso se analizaron los registros verbal, simbólico y gráfico empleados durante la enseñanza de los temas *Plano y Recta en el Espacio* y *Superficies Cuádricas* en la asignatura *Álgebra Lineal y Geometría Analítica* de las carreras de Ingeniería que se dictan en la *Universidad Nacional del Chaco Austral* (UNCAUS), en Chaco, Argentina.

**Palabras Claves:** Geometría Analítica en el Espacio, Teoría de registros de representación semiótica, Geometría dinámica, Secuencias didácticas.

### 1 Introducción

Una de las preocupaciones de la Universidad Nacional del Chaco Austral (UNCAUS), es aumentar la retención de los alumnos evitando la deserción, rezago y bajo rendimiento académico, para ello, entre otras medidas, proponen se incorpore diversas metodologías de enseñanza. En esta búsqueda de nuevas metodologías, la inclusión de tecnologías y el aporte que éstas realizan al desarrollar actividades desde más de un sistema de representación parece ser el camino indicado, por este motivo, se decidió integrar el uso de un software de Geometría Dinámica.

El presente trabajo, se encuentra en el marco del proyecto de investigación PI 66 Secuencias didácticas con GeoGebra utilizando los registros semióticos de representación en Geometría del Espacio, llevado a cabo en la Universidad Nacional del Chaco Austral.

### 2 Planteamiento del problema

Para la realización de la propuesta didáctica que se presenta, se priorizó el uso de tecnología informática a través de aplicaciones realizadas con el software dinámico GeoGebra versión 5.0 [1].

Su uso en Geometría del Espacio ayuda a los estudiantes a ver determinados conceptos desde una nueva perspectiva. Hohenwarter, Hohenwarter, Kreis y Lavicza en [2] analizaron el uso y grado de satisfacción de los estudiantes al trabajar con GeoGebra. La manipulación de un entorno dinámico como éste, ayuda al estudiante a ampliar su experiencia permitiendo coordinar diferentes registros de representación, lo que es muy difícil de lograr sin la mediación de este tipo de software.

El marco teórico del presente trabajo se basa en la teoría de registros de representación semiótica desarrollada por Raymond Duval, que permite explicar el nivel de conceptualización en base a los cambios entre los distintos registros de representación exigiendo el conocimiento, el tratamiento y la conversión de éstos, los que son utilizados en las distintas actividades planteadas.

Para Duval [2] es fundamental el rol que juegan los registros semióticos de representación, en la actividad matemática. Dentro de los mismos tienen lugar las representaciones semióticas que, en el ámbito de las

matemáticas, están dadas por notaciones simbólicas o gráficas, o bien manifestaciones verbales, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos en esta disciplina, así como sus características y propiedades más relevantes. Estas representaciones se agrupan en diferentes registros de representación [3], según sean las características que posean.

Este autor, considera para que un sistema semiótico sea un registro de representación debe permitir tres actividades cognitivas fundamentales: *Formación de una representación*, identificable como una representación en un registro dado; *Tratamiento de la representación* esto es, la transformación de la representación realizada en el mismo registro en que ha sido formulada, es una transformación interna a un registro y *Conversión de la representación*, que es la transformación de la representación en una representación de otro registro, conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial. Dominar un concepto matemático requiere conocer y reconocer sus principales representaciones, para así convertirlas o traducirlas de un modo a otro.

Analizando las representaciones utilizadas durante la enseñanza de los temas Plano y Recta en el Espacio y Superficies Cuádricas que se dictan en la asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica de las carreras de Ingeniería Química, Ingeniería en Alimentos, Ingeniería Industrial, e Ingeniería en Sistemas de Información, se observó que el enfoque de la misma relegaba variantes entre los diferentes registros de representación utilizados, dejando de lado la importancia que tiene la conversión de las representaciones en la formación de conceptos matemáticos, lo que suponía un obstáculo en el aprendizaje de estos objetos.

Dada la situación contextual presentada, este trabajo propuso abordar el siguiente problema de investigación: La falta de coordinación entre los distintos sistemas de representación dificulta que los alumnos que cursan las carreras de Ingeniería desarrollen el pensamiento espacial.

Dada la situación contextual presentada, este trabajo propone el siguiente problema de investigación:

La falta de coordinación entre los distintos sistemas de representación dificulta que los alumnos que cursan las carreras de Ingeniería desarrollen el pensamiento espacial mejorando la aprehensión conceptual de los conceptos ligados a plano, recta en el espacio y superficies cuádricas.

### 3 Objetivos

Se propuso como objetivo general: Contribuir a la aprehensión conceptual de Geometría del Espacio, mediante la coordinación entre los diferentes registros de representación de un mismo objeto matemático, en alumnos de primer año de las carreras Ingeniería de la UNACUS a través del diseño, aplicación y evaluación de secuencias didácticas utilizando el software dinámico GeoGebra; y como objetivos específicos: 1) Establecer los elementos teóricos didácticos necesarios, alrededor del estudio de Geometría del Espacio teniendo en cuenta la coordinación entre los diferentes registros de representación, para la elaboración de un diseño de secuencias didácticas integrando GeoGebra; 2) Aplicar situaciones didácticas que estimulen la actividad cognitiva relacionada a la coordinación entre los diferentes registros de representación y 3) Analizar y evaluar si los estudiantes reconocen el objeto de estudio en diferentes registros de representación así como su habilidad para realizar la conversión entre los mismos a través del rendimiento académico haciendo uso de GeoGebra.

### 4 Descripción

Duval en [3] afirma que, para conseguir la *formación* de una representación identificable, se debe llevar a cabo una selección de rasgos y de datos en el contenido por representar; tal selección depende de unidades y reglas de formación que son propias del registro semiótico en el cual se produce la representación. Dicha formación respeta las reglas del registro y éstas aseguran en primer lugar, las condiciones de identificación y de reconocimiento de la representación y, en segundo lugar, la posibilidad de su utilización para los parámetros. Define como *tratamiento de la representación*, a la transformación que se lleva a cabo dentro del mismo registro donde ha sido formada dicha representación. El tratamiento es una transformación interna a un registro. Para este autor, existen reglas de tratamiento propias de cada registro, su naturaleza y número varían considerablemente de un registro a

otro y como *conversión de la representación*, la define como una transformación externa al registro de partida, conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial. La conversión produce una representación en un registro distinto al de la representación inicial. Es el primer umbral de la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. Esta actividad es la menos espontánea de las tres y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los alumnos. No solo el cambio de registro ocasiona obstáculos que son independientes de la complejidad del campo conceptual en el que se trabaja; también, con mucha frecuencia, la ausencia de coordinación entre los diferentes registros de representación genera un obstáculo para los aprendizajes conceptuales.

#### 4.1 Registros utilizados

Se realizó un análisis de los registros involucrados en los temas: Plano y Recta en el Espacio y Superficies Cuádricas de las guías de trabajos prácticos de Álgebra Lineal y Geometría Analítica dadas en el año 2017, correspondiente a las carreras de Ingeniería de la UNCAUS, observándose en cuanto a ejercicios que requerían de tratamientos, un predominio del registro simbólico, en menor porcentaje el registro verbal y, ausencia de tratamiento en el registro gráfico. En cuanto a conversiones en el tema Plano y Recta en el Espacio, se plantearon actividades que requerían las siguientes transformaciones: conversiones del registro simbólico al verbal, del registro simbólico al gráfico y del registro gráfico al verbal. Analizado el tema de Superficies Cuádricas las actividades que se plantearon requerían conversiones desde el registro verbal al simbólico, del registro simbólico al gráfico, registro gráfico al verbal y del registro gráfico al simbólico.

Dado que dominar un concepto matemático requiere conocer y reconocer sus principales representaciones, para así convertirlas o traducirlas de un modo a otro. Sin embargo, el manejo de diferentes sistemas de representación y la conversión entre unos y otros no es suficiente para obtener una comprensión integral. Es necesario crear condiciones donde sea posible establecer una coordinación entre los diferentes registros de representación. *La coordinación entre las representaciones que provienen de sistemas semióticos diferentes no es espontánea. Su puesta en juego no resulta automáticamente de los aprendizajes clásicos demasiado directamente centrados en los contenidos de la enseñanza. Lo necesario para favorecer tal coordinación parece ser un trabajo de aprendizaje específico centrado en la diversidad de los sistemas de representación, en la utilización de sus posibilidades propias, en su comparación por la puesta en correspondencia y en sus “traducciones” mutuas [4].*

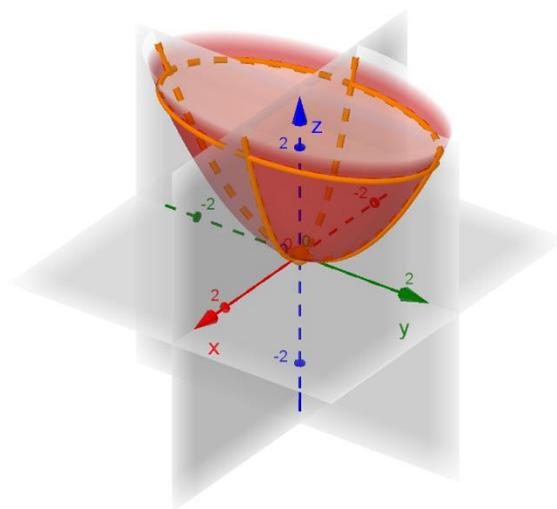
Teniendo en cuenta estas consideraciones, se diseñaron y analizaron secuencias didácticas que abarcaron todas las categorías de comportamientos posibles. *La conversión y el tratamiento debe ser separados para analizar lo que hacen los estudiantes cuando se enfrentan con el problema; esta separación metodológica y teórica va en contra de la práctica actual de considerar estos dos tipos de transformaciones como una unidad para la resolución de los problemas [5].*

En los Cuadros 1 y 2, se muestran actividades de la guía de trabajos prácticos: Superficies cuádricas, donde las capacidades que se espera que los alumnos desarrollen son:

- Reconocimiento de la representación en el registro gráfico.
- Conversión de la representación desde el registro gráfico hacia el registro verbal y simbólico.
- Reconocimiento de la representación en el registro simbólico.
- Tratamiento de la representación en el registro simbólico.
- Conversión de la representación desde el registro simbólico hacia el registro verbal y gráfico.

**Cuadro 1.** Reconocimiento y Conversión de representaciones.

<i>Registro de partida: Registro gráfico</i>
Indicar el nombre, escribir la ecuación genérica y enunciar las características correspondientes observando el gráfico de la siguiente superficie.



*Registro de llegada: Registro simbólico y verbal*

Ecuación genérica correspondiente:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

Nombre de la superficie: Paraboloides Elíptico.

El eje del paraboloides es el eje z, es una superficie abierta para  $z = k$  con  $k > 0$

En las secciones planas paralelas al plano xy se obtienen elipses y en las trazas con los planos coordenados xz e yz parábolas que pasan por el origen.

**Cuadro 2.** Reconocimiento, Tratamiento y Conversión de representaciones

*Registro de partida: Registro Simbólico*

Representar gráficamente la superficie  $4x^2 - 5y^2 = 20z$ , tomando como base la discusión de la misma. Clasificarlas.

*Registro de llegada: Registro Simbólico, Verbal y Gráfico*

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = z \quad \text{Cuádrlica no centrada. Paraboloides hiperbólico.}$$

• *Intersección con los ejes coordenados*

Intersección con el "eje x",  $y = z = 0$

$$\frac{x^2}{5} = 0, \quad x = 0 \quad P(0,0,0);$$

Intersección con el "eje y",  $x = z = 0$

$$-\frac{y^2}{4} = 0, \quad y = 0 \quad P(0,0,0);$$

Intersección con el "eje z",  $x = y = 0$

$$0 = z, \quad P(0,0,0)$$

Por lo tanto, tiene un único punto de intersección que es el origen de coordenadas

• *Simetría*

Es simétrico al "eje z" y a los planos xz e yz

• *Trazas sobre los planos coordenados*

Plano  $xy$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

La ecuación es del género de la hipérbola y la gráfica es un par de rectas que se cortan en el origen de coordenadas.

Plano  $yz$

$$\begin{cases} -\frac{y^2}{4} = z \\ x = 0 \end{cases}$$

Representa una parábola por debajo del plano  $yz$ , con vértice en el origen de coordenadas y eje focal coincidente con el eje  $z$ .

Plano  $xz$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{5} = z \\ y = 0 \end{cases}$$

Representa una parábola por encima del plano  $xz$ , con vértice en el origen de coordenadas y eje focal coincidente con el eje  $z$ .

- *Secciones planas paralelas a los planos coordenados*

Al plano  $xy$  si  $z = k$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = k \\ z = k \end{cases}$$

Las curvas de intersección con estos planos son hipérbolas con eje focal paralelo al eje  $x$  siempre que  $k > 0$  y con eje focal paralelo al eje  $y$  si  $k < 0$ .

Al plano  $yz$  si  $x = k$

$$\begin{cases} -\frac{y^2}{4} = z - \frac{k^2}{5} \\ x = k \end{cases}$$

Parábola con eje de simetría el eje  $z$ , por debajo del plano  $yz$ .

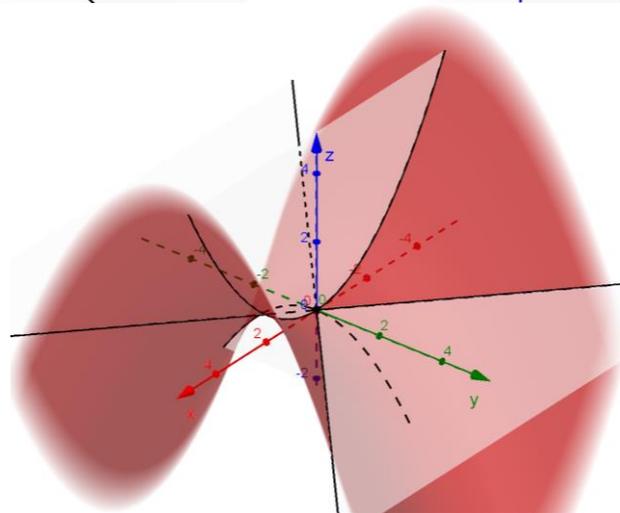
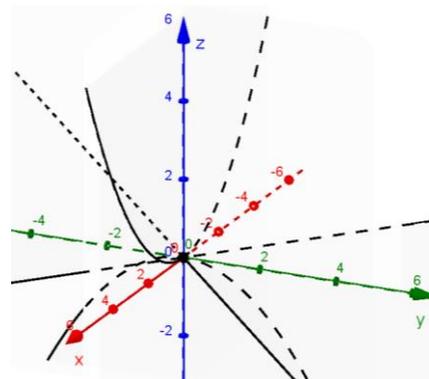
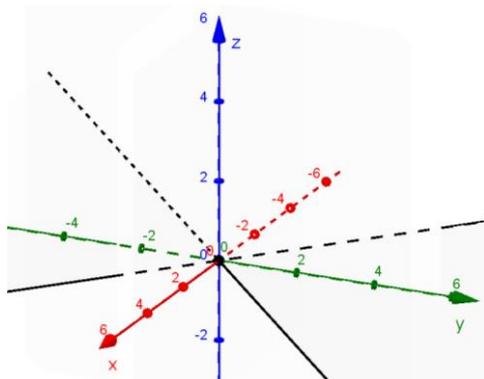
Al plano  $xz$  si  $y = k$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{5} = z + \frac{k^2}{4} \\ y = k \end{cases}$$

Parábola con eje de simetría el eje  $z$

- *Extensión*

Es una superficie es abierta pues las tres variables  $x, y, z$  pueden tomar cualquier valor real.



## 5 Resultados y conclusiones

Este estudio se realizó a partir del objetivo enunciado anteriormente, empleando una metodología cuantitativa, con un diseño cuasi experimental con posprueba únicamente y grupo de control. La población seleccionada está formada por alumnos de primer año del segundo cuatrimestre que cursaron Álgebra Lineal y Geometría Analítica de las carreras de Ingeniería que se dictan en la UNCAUS y que aprobaron el segundo parcial, el grupo control conformado por 13 alumnos y el grupo experimental 12 alumnos.

Para la elaboración de la secuencia didáctica 2018, se incorporaron actividades tanto de tratamiento como de conversión en los registros faltantes.

Se analizaron los datos obtenidos en la tercera evaluación que fue suministrada en el año 2018 en la que se evaluaron ambos temas, y se los comparó con la suministrada en el año 2017, teniendo en cuenta las categorías comunes. En la secuencia didáctica Plano y Recta en el Espacio, se obtuvieron mejores resultados en ejercicios que requerían conversión desde simbólico al gráfico y del simbólico al verbal y en la secuencia didáctica Superficies cuadradas, mejores resultados en ejercicios que requerían conversión del gráfico al verbal y, en ambos se logró mejores resultados en ejercicios que requerían de tratamiento simbólico, en el resto de las actividades no se evidenciaron diferencias significativas.

Los resultados de esta investigación podrán contribuir al desarrollo del conocimiento en el campo de las matemáticas y las problemáticas planteadas que motivaron su estudio. La producción tiene un impacto directo en la construcción de propuestas didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, las cuales pueden integrar el conocimiento de las ideas previas de forma abstracta y visualizarlos al utilizar el software, lo que significa que ambas podrán formar parte al planificar las estrategias docentes adecuadas para abordarlas, optimizando de esta manera las prácticas docentes y el aprendizaje de conceptos científicos por parte de los estudiantes.

## Referencias

1. Hohenwarter, M. (2015). GeoGebra (versión 5.0) [Programa de Computador]. Österreich, Linz, Austria. Disponible gratuitamente en <https://www.geogebra.org/>
2. Hohenwarter, M.; Hohenwarter, J.; Kreis, I. y Lavicza, Z. (2008). *Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra*. Documento presentado en el ICME 11. 11th International Congress Mathematical Education, México. Recuperado el 15 de junio de 2015 de <http://archive.geogebra.org/en/wiki/index.php/Publication>.
3. Duval, R. (2004). *Sémiosis y Pensamiento Humano*. (Traducción de título original: *Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*) (2ª ed) Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Santiago de Cali, Colombia: PeterLang. S.A.
4. Duval R. (1998/1993) Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II*. (Traducción del original francés: *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*), (Vol. 5) México: Grupo Editorial Iberoamérica.
5. Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta de la RSME*, 9(1),143–168