



The Influence of Teaching and Military Art on the Evolution of Mathematics and Statistics

Filipe José Loureiro Papança

EasyChair preprints are intended for rapid dissemination of research results and are integrated with the rest of EasyChair.

March 1, 2021

“A influência do ensino militar na evolução da Matemática e da Estatística”

A arte da guerra desde os tempos mais remotos exerceu uma influência crucial sobre o desenvolvimento da Matemática, fornecendo o principal alimento de que se nutre esta ciência, a resolução de problemas, único aspecto que define um grande Matemático.

Desde muito cedo, a necessidade de avaliar a quantidade de gente disponível para as batalhas, o desenho de fortificações e de dispositivos que facilitem o assalto, envolvendo a construção de veículos e máquinas que auxiliem o combate, a balística, o estudo da topografia dos terrenos onde se irão desenrolar as contendas, a resolução de problemas relacionados com a locomoção e a navegação, a progressão das tropas no terreno aliada à logística de combate, a gestão dos recursos disponíveis quer humanos, quer materiais, quer financeiros, a meteorologia, o desenvolvimento de técnicas de previsão e simulação, a selecção e a formação quer dos combatentes, quer dos estrategas, constituem alguns dos aspectos que influenciaram o desenvolvimento da Matemática, aos quais esta cedo procurou dar resposta, contribuindo para a génese do pensamento racional.

É na *Ilíada* narração em verso da guerra de Tróia, que encontramos os primeiros vestígios de expressão da racionalidade por exemplo, quando Homero se refere às palavras aladas, sentidas. No dizer de Descartes a poesia constituiu a primeira linguagem da Humanidade, transformando esta guerra num acto cultural.

Estes constituem apenas os primórdios de uma grande aventura que só começa quando começamos a ver beleza nas coisas. Como dizia Dostoievski << a beleza salvará o mundo >>¹. Coube aos gregos esse papel, através da sua visão da beleza encarada como o esplendor da verdade racional, buscando assim o prazer intelectual comparável ao da criação artística. O seu êxtase, o supremo dessa beleza só é atingido quando o raciocínio se torna irrefutável, dando lugar à demonstração. Só então a matemática se torna uma ciência. É a única em que o conhecimento, uma vez adquirido é adquirido para sempre, cada nova descoberta se torna uma generalização das anteriores, por este motivo se costuma apelidar da rainha das ciências.

Francisco Gomes Teixeira, eminente Matemático Português, autor da *História das Matemáticas em Portugal* escrevia nesse seu livro: << Os que se ocupam das ciências começam e estudá-las pelo que têm de útil, principiam a amá-las quando compreendem o que têm de belo, e apaixonam-se por elas quando sobem assaz alto para abranger o que têm de sublime >>.

A Matemática é a música da razão afirmava um grande Matemático, mas ao contrário da música dos sentidos não se pode gozar sem a aprender profundamente.

O que tornou célebres Arquimedes, Leonardo da Vinci foi sem dúvida o facto de não só de terem resolvido problemas práticos, muitos deles relacionados com a arte da guerra, envolvendo a construção de máquinas, de fortalezas, mas terem ido muito para além disso. Neles a beleza aliada à capacidade de amar transforma-se em visão, visão do futuro, transcendendo o mero contexto da sua época, rumo à intemporalidade. Os seus projectos alguns como o caso duma ponte só construída no sec. xx, os seus esboços em que já surge algo que faz lembrar um helicóptero, as maquetas construídas (algumas só recentemente) a partir deles, exprimem essa realidade.

¹ Dostoievski – *O Idiota*

Ainda hoje constituem fonte de inspiração, orientando-nos naquela que na verdade constitui a principal missão do ensino superior a de abrir de horizontes. O docente Universitário no seu sentido pleno, deverá ser na ser um livre pensador.

O método desempenha igualmente um papel crucial, no seu livro, o *Método*, só redescoberto no sec. xx, Arquimedes, mostra-nos como foi possível chegar tão longe no conhecimento, recriando a realidade através de sucessivas aproximações, não hesitando em recorrer à física sempre que necessário, conseguindo dessa forma intuir por exemplo a área do segmento da parábola, de especial interesse para a balística, a relação entre o volume do cilindro e o volume da esfera, seguindo uma ideia inicialmente lançada por Demócrito e Eudoxo que este modifica e aperfeiçoa. Eis-nos perante aquilo que Pascal apelidava de *spririt geometric*. Então só quando tivesse a certeza do resultado, aplicaria o Método Exaustão de Eudoxo ou a Dupla Redução ao Absurdo para o demonstrar. Após concluir que a área do segmento de parábola é $\frac{4}{3}$ da área do triângulo efectua o seguinte comentário:

“Ora o facto aqui afirmado não é na realidade demonstrado pelo argumento que utilizamos: Mas este argumento deu-nos uma espécie de indicação de que a conclusão é verdadeira. Vendo então que o teorema não está demonstrado mas suspeitando que a conclusão é verdadeira, nós recorremos à demonstração geométrica que eu próprio descobri e já publiquei.”

Lendo algumas das suas passagens, sentimos vontade de o imitar, de ser seus discípulos, característica que define os grandes mestres, o facto de criarem Escola, partilhando com os seus a suprema beleza que reside no Universo, patente na harmonia das suas leis, expressas por números. Os primeiros a constatar esta realidade foram os pitagóricos, tal facto constituiu causa da sua grandeza.

O mesmo sucedeu com Descartes, as suas deslocações, motivadas pelas várias campanhas militares em que participou, na Holanda, em La Rochele, alargaram-lhe horizontes, nos intervalos começou a efectuar viagens de estudo independente contactando com algumas das figuras mais eminentes da época, como Desargues, arquitecto e engenheiro militar de Lyon que conheceu na campanha de La Rochele, passando igualmente a fazer parte do círculo de Marsenne, Matemático e frade Minorista que punha em contacto os grandes vultos do pensamento. Como resultado dessa situação surge uma visão científica transformada do mundo. Em termos da Matemática traduz-se numa nova forma de abordagem da resolução de problemas pendentes desde a Antiguidade, implicando uma mudança revolucionária de metodologia. Surge então a Geometria Analítica, conciliando o que de melhor existia na álgebra, naquela altura muito relacionada com o estudo das equações, e a geometria. No sentido de melhor explicar esta realidade escreve um livro chamado *Discurso do Método*, em que escreve:

“ Tendo notado, em seguida, que para as conhecer teria algumas vezes necessidade de as considerar cada uma em particular, e outras vezes somente de reter ou compreender várias ao mesmo tempo, pensei que, para as considerar melhor em particular, as devia figurar por linhas, por não encontrar nada mais simples, nem que pudesse mais distintamente representar à minha imaginação e aos meus sentidos; mas que, para reter ou compreender várias simultaneamente, era necessário designá-las por alguns caracteres, os mais simples possíveis; e que, dessa maneira, aproveitaria o melhor da análise geométrica e da álgebra e corrigiria todos os defeitos duma pela outra.”

Pela primeira vez se começou a superar o paradigma Grego, em que a incógnita era apenas encarada como linha, o produto de duas grandezas iguais como um quadrado, e de duas grandezas diferentes como um rectângulo².

Constituiu o ponto de partida para o Cálculo Infinitesimal em que colaboraram nomes como Pierre Fermat, Leibnitz, Isaac Barrow e Newton. A surpresa foi tão grande que esta descoberta abalou os próprios meios artísticos, tendo sido levada à cena em França uma peça sobre este tema. Em Portugal o próprio Bocage, o utilizou numa das suas sátiras:

*(...)Nariz, nariz e nariz,
Nariz, que nunca se acaba,
Nariz, que se ele desaba
Fará o mundo infeliz;
Nariz, que Newton não quis
Descrever-lhe a diagonal;
Nariz de massa infernal,
Que, se o cálculo não erra,
Posto entre o Sol e a Terra
Faria eclipse total! (...)*

Na verdade trata-se de um Ex-militar, promovido a tenente pelos seus feitos, tendo frequentado a Academia Real de Marinha e a Academia dos Guardas-Marinhas, escolas em que se ensinava a par do ensino na navegação, as Matemáticas Puras e Aplicadas em cursos de três anos.

Em França os grandes os grandes Matemáticos que participaram na Revolução Francesa, fizeram a sua formatura em escolas militares. Não pertenciam à nobreza, logo nada teriam (em teoria) a perder com a queda do Antigo Regime.

Participaram em Projectos Matemáticos durante a Revolução como o projecto da reforma de pesos e medidas. Carnot, Condorcet e Monge inseriram-se mesmo nas próprias actividades revolucionárias. Condorcet acabou vítima do Terror que se seguiu, que acabou por favorecer a ascensão de Napoleão, novo senhor absoluto da França sendo coroado imperador em Notre Dame.

O seu interesse pela Matemática tem origem nos seus tempos de estudante nas academias militares de Brienne e Paris. É-lhe mesmo atribuído um teorema. Consciente da importância da relação entre o desenvolvimento tecnológico e o conhecimento matemático, decreta: “O progresso e a perfeição das matemáticas estão intimamente ligados à prosperidade do estado”. Apesar da trágica campanha da Rússia, de Waterloo e dos seus exílios forçados esta ideia irá permanecer viva.

É sob o seu regime que se fundam escolas e academias militares que dão uma atenção especial ao ensino da Matemática como a base da formação de engenheiros militares.

Neste contexto é fundada a Escola Politécnica de Paris (1794), instituição que se tornou um modelo para o estudo geral da engenharia militar no início do sec XIX. Constituirá a fonte de inspiração que presidirá à criação de outras academias militares, incluindo West Point. Em Portugal a Academia Militar e a Escola Politécnica seguem este modelo.

² Esta maneira de dizer continuou a ser utilizada em Portugal no sec XVIII, constitui exemplo disso a *Lógica Racional, Geométrica e Analítica* de Azevedo Fortes, *Edições José António Prates*, 1744;

A Escola Normal criada nos anos da Revolução Francesa, sem o mesmo rigor na selecção dos candidatos terá um curta duração.

Nestas instituições leccionavam grandes vultos da Matemática. Lagrange começou a sua carreira na Escola de Artilharia de Turim e mais tarde na Escola Normal, em conjunto com Laplace, e Escola Politécnica de Paris. Legendre, Laplace, Monge leccionaram igualmente na Escola Politécnica. Legendre também leccionou na Escola Normal. Monge que foi director desta escola e líder científico do grupo de matemáticos, começou a sua actividade docente em Mézieres onde as suas lições sobre fortificações o obrigaram a desenvolver a geometria descritiva. Carnot era capitão de engenharia.

Esta forma de ensino, exigia uma nova geração de manuais, implicando uma mudança na sua concepção. Os tratados eruditos do tempo de Euler passaram a ser completados por manuais escolares.

Os autores foram de certa forma pressionados a elaborar estas publicações como auxiliares da sua leccionação.

Reflectindo desta mentalidade, exemplo clássico de elaboração de uma publicação para estudantes é a obra *Essai Philosophique sur les Probabilités de Laplace*. O próprio autor o confessa na introdução: “Cet essai philosophique est le développement d’une leçon sur les probabilités, que je donnai en 1795, aux écoles normales où je fus appelé comme professeur de Mathématiques avec Lagrange, par un décret de la Convention nationale” .

Na verdade Newton e Laplace ficaram famosos não só pelas suas descobertas mas igualmente pela beleza com que apresentavam e expunham os seus resultados.

O livro *Éléments de Géométrie avec des notes* (Legendre) que aparece em 1794, ano do terror com vinte edições em vida do autor, tornou-se um clássico por aliar o rigor e a clareza, elaborado com base nos Elementos de Euclides converteu-se num especial modelo para as escolas americanas.

Géométrie Descriptive de Monge espelha a concepção geométrica do autor:

“La Géométrie Descriptive a deux objects: le premier, de donner les methodes pour représenter sur une feuille de dessin qui n’a que deux dimensions, savoir, longueur et largeur, tous les corps de la nature qui en trois, longueur, largeur et profondeur, pourvu néanmoins que ces corps puissent être définis rigoureusement.

Le second object est de donner la manière de reconnaître, d’après une description exacte, les forms de corps et d’en déduire toutes les vérités qui résultent et de leur form et de leurs positions respectives”.

Em Portugal a expulsão dos Jesuítas pelo Marquês de Pombal em 1759 motiva a fuga precipitada de muitos mestres, a Universidade, ainda muito ligada a paradigmas Escolásticos encontra-se numa profunda crise. No sentido de modificar esta situação Sebastião José decide reformar a Universidade de Coimbra reformulando as faculdades, a orgânica dos cursos, os currículos. O primeiro ministro de D. José contou com os preciosos conselhos de Ribeiro Sanches, médico de Catarina II da Rússia e de Monteiro da Rocha, eminente matemático e astrónomo, autor de importantes tratados de astronomia, curiosamente ex-Jesuíta que redige alguns dos capítulos.

Mas onde encontrar professores? Surgem então figuras oriundas principalmente de meios militares à semelhança do que aconteceu em França, pois existiam escolas associadas a Regimentos e Praças Fortes como Viana, Elvas e Almeida, bem como das Academias que se foram sucedendo num percurso não isento de vicissitudes: as já referidas Academia Real de Guardas das Marinhas e Academia Real de Marinha, Academia Militar, Academia Real de Fortificação, Artilharia e Desenho.

Os percursos destes estabelecimentos foram os cursos especiais criados no sec. XVII nos quais se inclui a célebre Aula de Fortificação, criada por D. João IV, confiada a Luís Pimentel Serrão, autor de um tratado de navegação ampliado e melhorado por seu filho Manuel e seu neto Luiz-Francisco, de um compêndio sobre Aritmética Decimal e Trigonometria Rectilínea e de um célebre tratado de Arquitectura Militar que intitulou *Método Lusitano de Desenhar Fortalezas*. O seu sucessor Manuel Azevedo Fortes escreveu igualmente um tratado de fortificação, arquitectura e defesa de praças intitulado *Engenheiro Português*. No sentido de completar a formação base em álgebra e geometria teórica dos seus discípulos elaborou um tratado intitulado *Álgebra Racional Geométrica e Analítica*.

José Anastácio da Cunha personifica toda esta geração, Matemático, poeta e tradutor traduzindo obras de Anacreonte, Horácio, Milton, Shakespeare, Racine, Voltaire, Pope, algumas das quais pela primeira vez em Português. Militar, tenente do exército, em 1762 aos 18 anos assentou praça no Regimento de Artilharia do Porto, então aquartelado em Valença, onde recebe formação em Matemática. Mais tarde nomeado pelo Marquês de Pombal leccionou na Universidade de Coimbra. Perseguido pela inquisição, destituído dos seus cargos académicos, valeu-lhe a intervenção do Intendente Geral da Polícia, Pina Manique que o nomeou director da Casa Pia.

Já doente e debilitado, é nas antigas instalações do Castelo de S. Jorge que termina a sua grande obra, *Princípios Matemáticos para utilização dos alunos da Casa Pia de Lisboa* que procura ser o mais abrangente possível a nível da Matemática descoberta até então. É uma obra inspirada nos *Elementos de Euclides* baseada em Definições, Axiomas, Proposições mas incorporando os últimos avanços da Matemática.

Segundo o professor Vítor Gonçalves, a definição I, do livro VIII dos Princípios o Critério de Convergência apresentado é precisamente o mesmo que a condição necessária e suficiente apresentada por Cauchy no *Cours de Analyse* de 1821. Esta é utilizada uma única vez na demonstração da série geométrica de razão inferior a 1. A convergência das séries é utilizada por comparação dos seus termos com os das séries geométricas, oiçamo-lo:

“Série convergente chamam os Matemáticos àquela cujos termos são semelhantemente determinados cada um pelo número dos termos precedentes, de sorte que sempre a série se possa continuar, e finalmente venha a ser indiferente continuá-la ou não, por se poder desprezar sem erro notável a soma de quantos termos se quisesse ajuntar aos já escrito ou indicados...”

Foram efectuadas duas publicações desta obra, uma Portuguesa de 1790, já póstuma (consta que as últimas correcções foram já efectuadas na véspera da sua morte) e outra Francesa impressa em Bordéus em 1811.

O seu método de ensino baseia-se na resolução de problemas, como o próprio o afirma numa carta a Monteiro da Rocha, seu colega na universidade com o qual mantém uma acesa polémica:

“O meu *modo de ensinar* era o que a minha consciência e inteligência (...) me ditavam. Expunha o objecto das proposições, a sua conexão e dependência (...). Não me demorava em ler ou repetir literalmente as proposições que por fáceis nem carecem de explicação, nem a admitem, só para poder empregar tempo suficiente em indicar aos estudantes as verdadeiras dificuldades da lição (...). Porem queria que os estudantes trabalhassem, e os obrigava a resolver problemas.”

Anastácio da Cunha não terá sido nem santo, nem herói como bem o assinalou o prof. Tiago de Oliveira, um homem simplesmente comum mas de talento notável, o próprio o terá deixado transparecer nesta quadra, qualificada por Aquilino Ribeiro como uma jóia rara:

Copado,
alto,
gentil
Pinheiro Manso;

Debaixo
cujos
ramos
debruçados

Do
sol
ou lua
nunca penetrados,

Já gozei,
já
gozei
mais
que
descanso ...

Como foi dito anteriormente, este ambiente propício ao desenvolvimento da Matemática sobrevive à queda de Napoleão, por volta de 1820, Paris permanece uma cidade atraente a estudantes de Matemática. L'École Polytechnique com os seus mestres, as suas conferências abrangendo uma vasta gama de temas, as suas publicações que incluíam um jornal.

Alem de Laplace e Legendre ambos já em fim de carreira, surgem Fourier, com os seus trabalhos no âmbito do estudo das funções e das séries, o já referido Cauchy, com contribuições decisivas para o estudo das funções, solidificando o cálculo através da formulação de noções mais precisas de limite, continuidade e derivada.

Galois, autor de um critério geral para averiguar se dada uma equação algébrica, ela admite ou não resolução por meio de radicais, tentou entrar para esta escola, não tendo conseguido, matriculou-se na École Normal. Desafiado para um duelo por causa de uma *coquette*, estamos já em pleno período do Romantismo, vem a falecer a 30 de Maio de 1832 aos vinte anos de idade. Na véspera, prevendo a sua morte redige um artigo onde revela as suas descobertas, entre as quais um novo e importante capítulo da Matemática, a teoria dos grupos e dos anéis, designada ainda recentemente por Matemática Moderna, só introduzida no ensino em Portugal nos anos 60-70 do sec. xx, ainda assim após acesa polémica.

Foi precisamente do modelo Francês que Bernardo de Sá Nogueira, Marquês de Sá da Bandeira e fundador da Escola do Exército, mais ensinamentos retirou. Esta visão foi sendo reforçada com sucessivas Visitas de Estado Maior efectuadas no final de cada ano lectivo por responsáveis deste estabelecimento. Com grande experiência no campo

de batalha, conhecendo bem as deficiências do ensino de que fora aluno, bem como o tinha sido também da universidade, teve ocasião de constatar os progressos ocorridos naquele país, frequentando assiduamente desde 1820 a 1824, os cursos de Cuvier, Blainville, Gay-Lussac, Saint-Hilaire.

Após uma época de lutas internas fratricidas que ensanguentaram o território português e que muito o desgostaram, nos alvares do reinado de D. Maria II, a situação política portuguesa conhece alguma acalmia. Sá da Bandeira entra pela terceira vez no ministério da marinha em Novembro de 1835. Havia já revelado vastos e profundos conhecimentos numa anterior passagem de Novembro de 1832 a Maio de 1833.

É nesse período que se criam a Academia de Belas Artes, o Conservatório Dramático, decreta-se a reorganização da antiga Academia de Fortificação, Artilharia e Desenho, recebendo o nome de Escola do Exército. A Escola Politécnica, por ele igualmente fundada, escola preparatória por excelência, completava o seu pensamento.

Naquela época os estudos matemáticos castrenses resumiam-se à Geometria de Euclides, Trigonometria do Padre Jesuíta Manuel de Campos³, professor na Aula de Esfera do Colégio de S. Antão e uns incipientes estudos de fortificação. Quando havia discípulos que revelassem maior aptidão forneciam-se-lhes os livros de Azevedo Fortes⁴ e Pimentel mas sem serem objecto de qualquer avaliação.

O colégio dos Nobres deu igualmente um importante contributo para a elevação do nível da cultura Matemática nos meios castrenses, uma vez que muitos militares eram oriundos de famílias da nobreza. O número de alunos era de cem, sendo o programa da disciplina de Matemática constituído por geometria, trigonometria, os teoremas de Arquimedes, os seis primeiros livros de Euclides, assim como os 11º e 12º por causa do estudo dos sólidos. Esta instituição era mesmo detentora do privilégio exclusivo atribuído pelo Marquês de Pombal, da impressão dos livros de Euclides, Arquimedes e outros clássicos da Matemática, sendo o referido privilégio transferido para a Universidade de Coimbra, aquando da sua reforma em 1775 como se refere na referida edição de 1792.

Era urgente portanto uma profunda reforma, que dotasse não só o exército de gente devidamente habilitada em Matemáticas, mas pelo devidamente exposto anteriormente o país, colocando-o a par das modernas correntes, especialmente dos novos ventos que sopravam de França. No relatório que precede o decreto de 12 de Janeiro de 1837, escreve Sá da Bandeira, referindo-se à Academia: “Mas a verdadeira reforma d’esta academia era impossível enquanto não se creasse uma escola de sciencias phisicas e mathematicas, na qual os alumnos adquirissem todos os princípios para poderem entrar com o indispensável desenvolvimento no estudo da difficil sciencia da guerra e as suas vastíssimas applicações. A escola está creada”.

A reforma não se limita aos aspectos curriculares. Também os aspectos pedagógicos são merecedores de atenção: desde divisão entre aulas teóricas e aulas práticas, introdução de trabalhos de campo e de projecto ao aspecto da disciplina em que se aconselha o suavizar algumas normas regimentais, tendo em atenção de que se trata de um estabelecimento de ensino que se pretende uma academia. É necessário então que exista espírito académico. O excesso de normas poderá prejudicar esse espírito.

Este estabelecimento passou como é natural por diversas reestruturações, de salientar a de 1863, visando uma melhor interligação entre o ensino teórico e prático, na área das Matemáticas introduz-se o estudo da Estatística; 1863, 1890 ambas procurando

³ *Trigonometria Plana e Esférica*, 1737; *Elementos de Geometria Plana e Sólida*, 1735;

⁴ *Lógica Racional, Geométrica e Analítica*; Edições José António Prates, 1744; *Verdadeiro Método* 1742; *Engenheiro Português* 1729;

actualizar os cursos face às novas realidades tecnológicas entretanto surgidas; 1911 derivada da adopção da forma miliciana no exército, introduz-se o estudo das ciências sociais (abrindo horizontes, visando tornar o oficial mais apto a ser um verdadeiro “educador do povo”), passando a denominar-se Escola de Guerra; 1915 efectuando uma redução da duração dos cursos face às contingências da guerra; 1919 marcando o regresso à normalidade, procurando retirar lições do anterior conflito e dando uma maior ênfase às questões coloniais, adoptando o nome de Escola Militar.

De acordo com a reforma de 1890 para a admissão à matrícula dos alunos nos cursos de cavalaria e infantaria, exigia-se além do curso de ciências professado nos liceus ou o do Colégio Militar, a aprovação na Escola Politécnica, na Universidade, ou na Academia Politécnica, nas seguintes disciplinas: Álgebra Superior, Geometria Analítica, Trigonometria Esférica e Geometria Descritiva.

A Escola Politécnica dará origem à faculdade de Ciências. Após a primeira República é criado o Instituto Superior Técnico (suprime-se então o curso de engenharia civil neste estabelecimento, leccionado desde 1837, destinando-o exclusivamente a fins militares), tendo como consequência uma diversificação do ensino da Matemática e consequentemente a alteração deste quadro.

Situação semelhante acontece no Brasil, em que a Real Academia Militar, concebida por D. Rodrigo de Sousa Coutinho, instituída em 1810 fica encarregue de formar os engenheiros militares até 1874.

Como já foi referido anteriormente, as deslocações motivadas pelas campanhas militares motivaram choques civilizacionais, muitos deles contribuindo para o desenvolvimento da Matemática. As campanhas de Alexandre levaram ao alastramento da civilização Grega ao Egipto, médio oriente, Anatólia, Mesopotâmia, Pérsia, até à Índia.

No Egipto findou a cidade de Alexandria, tendo sido fundada nesta cidade uma instituição que era um misto de escola, biblioteca, centro de investigação, denominada *Museu*. A ele estiveram ligados vultos como Euclides autor do primeiro grande tratado de Matemática logicamente organizado, Eratóstenes o primeiro a descobrir o tamanho da Terra, Arquimedes, dispensa apresentações, Apolónio autor de importantes trabalhos sobre curvas que inspiraram Kepler ao descrever a trajectória dos astros, Heron inventor da primeira máquina a vapor e de muitas outras.

Após a morte deste a cidade foi governada por uma dinastia grega fundada por Ptolomeu, general de Alexandre. Um dia este terá perguntado a Euclides se não haveria uma maneira mais fácil de aprender Matemática que não passasse pelo estudo dos Elementos ao que este lhe terá respondido que em Matemática não existia uma estrada para reis.

As suas expedições não eram só campanhas militares, existia também uma faceta cultural, por exemplo eram recolhidas espécies animais que eram organizadas taxionomicamente pelo seu mestre Aristóteles. Não é por acaso que a sua lógica, de onde deriva com pequenas modificações a lógica Matemática, se baseia na gramática. O conjunto de livros de entre os muitos que escreveu sobre os temas mais diversos, onde expressa o seu pensamento Matemático denominou de *Organon*, começa precisamente com Analíticos anteriores, em que a realidade é dividida em diversas categorias, seguida dos analíticos posteriores. Neles aparece pela primeira vez a descrição do significado de termos como a probabilidade, a correlação. Fornece-nos a descrição de um método de demonstração assente na prova por absurdo, ao contrário de Sócrates e Platão (seu mestre) que nos forneceram fundamentalmente um Método de Investigação.

Através das campanhas dos Árabes, a Europa recuperou o conhecimento de muitos manuais Gregos, perdidos pelo menos desde a queda do Império Romano, o próprio

termo Álgebra vem do Árabe Al-gebr. Deve-se a um matemático Azeri Mohammed Ibn Mûsã al Korasâmi, bibliotecário do califa, que escreveu um importante tratado sobre resolução de equações do 1º e 2º graus. Ao descrever a sua operação favorita, aquela em que se passa de um membro para o outro com mudança de sinal e se divide o termo que não tem incógnita pelo que tem incógnita, denominou-a por Al-gebr, operação que acabou por dar nome ao livro e por sua vez a tão importante disciplina da Matemática. Este constituiu igualmente um dos meios através dos quais a Europa toma conhecimento dos números decimais, tornando-se num traço de ligação entre os restos da Matemática Grega que tinham chegado à Índia e a Europa. Da latinização do nome do seu autor resultou a palavra *algoritmo*.

O interesse pelas obras e traduções Árabes, foi de tal ordem, que quando Toledo caiu novamente nas mãos dos cristãos, afluem a esta cidade numerosos estudiosos. Aos clássicos dever-se-ão juntar as tábuas astronómicas desenvolvidas pelos astrónomos árabes, a partir do estudo de tratados gregos, trabalho este continuado na corte de Afonso X de Castela, de cognome o Sábio, tio do nosso rei D. Dinis. Este ilustre monarca fez confluir à sua corte os melhores astrónomos do seu tempo, fossem eles cristãos, judeus ou mouros, mandou traduzir importantes tratados e patrocinou a construção de instrumentos naquela altura utilizados para observação do céu.

Este fenómeno marcou de tal maneira a Matemática que existem manuais gregos que não são conhecidos pelo seu nome original, mas pelo nome da sua tradução, como é o caso do Almagesto de Ptolomeu, em Árabe *O maior de todos*. Livro inspirado na teoria Geocêntrica de Hiparco circulando primeiramente em versões manuscritas, foi impresso pela primeira vez em 1515 na tradução latina de Gerard Cremona a partir do Árabe. O estudo dos astros começava pelo manual elementar de Sacrobosco denominado *Tratado da Esfera*, escrito no sec. XI, texto marcante para a formação de universitários, mas também de pilotos e cartógrafos, só quando os discípulos atingiam um certo nível de aprendizagem é que passavam a estudar pelo manual de Ptolomeu. De facto até ao sec. XVI foi o livro de astronomia mais utilizado, constituindo uma fonte permanente de inspiração para Pedro Nunes.

O próprio Nónio, instrumento de navegação inventado por Nunes já aparece descrito na obra de Ptolomeu. Luís de Camões também nele se inspirava quando a sua poesia necessitava de conhecimentos de Astronomia.

O *Epitoma Almagesti* de Peurbach e Regiomontano terá constituído a primeira obra do Ocidente latino a utilizar de forma construtiva os conteúdos do Almagesto.

A redescoberta, divulgação e utilização de importantes obras da Antiguidade, constituiu um forte impulso no sentido de uma mudança de mentalidades, abrindo as portas ao Renascimento e à modernidade. O triunfo da teoria Heliocêntrica, depois de Aristarco ainda antiguidade, Copérnico, Galileu com as suas observações resultantes da utilização da Luneta (forma primitiva de telescópio), Kepler através da descrição do movimento das órbitas dos astros, predominantemente elípticas, utilizando conhecimentos que já vinham desde Apolónio, constituiu o ponto culminante deste processo.

Já Afonso X se queixava, argumentando que um sistema tão complicado como o de Ptolomeu não podia ser obra de Deus ...

A campanha Napoleónica de conquista do Egipto envolveu igualmente uma componente científica. O próprio espólio do Museu do Louvre começa a ser constituído e catalogado através dos inventários das suas expedições.

A descoberta em Roseta um porto do Egipto de uma pedra contendo numa primeira linha escrita em Egípcio, uma segunda linha em Grego e uma terceira em Demótico,

permitiu ao especialista francês Champolion decifrar língua Egípcia. Esta civilização após permanecer muda durante quase dois mil anos, incluindo a sua Matemática subitamente passou a falar. Constituiu o ponto de partida para a decifração de outras civilizações como a Babilónia, a civilização Maia.

Na verdade a Matemática destes povos, uma Matemática antes da Matemática tratava de questões práticas, não distinguindo fórmulas de aproximações, em que não existe ainda o conceito demonstração, mas apesar de tudo isso muito interessante, utilizada sobretudo nas obras públicas, medição de terrenos, cálculo da capacidade de armazenamento de celeiros, neles se incluía no caso do Egipto e possivelmente de outros povos a aplicação da célebre fórmula do tronco da pirâmide quadrada, cobrança de impostos e mesmo, no caso da Babilónia de cálculos relacionados com a concessão de empréstimos, ainda hoje surpreendentemente utilizados em cálculo financeiro e de métodos numéricos de uma enorme eficácia, alguns mais rápidos que os utilizados na actualidade, como aproximação a irracionais como raiz de 2, havendo já um certa noção implícita de função exponencial e função logarítmica, utilização de potências de expoente negativo.

O ensino era já muito organizado, no caso do Egipto a escola de escribas situava-se em Tebas. Na Babilónia, existia já uma densa rede de escolas, cerca de 2800 anos antes de Cristo, havendo já uma carreira docente bem definida, assim como inspectores, supervisores. O ensino era muito rigoroso, a indisciplina era fortemente punida.

Regressando aos campos de batalha, a Matemática, servia por vezes de distração no decorrer das campanhas, como se pode ler nesta passagem escrita por D. João de Castro, em Tunes em 1535:

“Nos campos africanos da grande e miserável Cartago, jamais os ardentes raios do sol, nem as ásperas e contínuas corridas podiam ser ocasião que, aparecendo eu em sua Real tenda (...) me não praticasse qualquer proposição de cosmografia ...”.

Como já foi referido anteriormente a propósito do livro de Laplace, as Probabilidades e Estatística constituem outro campo amplamente fecundado pela arte militar. Já no sec. VI Ac. o célebre general Persa Xerxes, quando queria contar o nº de soldados que poderia eventualmente dispor, para uma batalha, efectuava-o por estimativa, ordenava que se alinhassem numa campo, essa área era dividida pelo espaço ocupado estimado por esse soldado. Podemos observar nesta operação a antecipação do conceito de Inferência Estatística e se pensarmos na Electrónica do Conceito de Pixel.

Em Portugal foram realizados vários levantamentos com vista a apurar o número de combatentes disponíveis. Constituem exemplo disso o Rol dos Besteiros de Conto de D. Afonso III, o Rol dos Besteiros de Conto de D. João I, o Numeramento de D. João III, a Resenha da gente da guerra de 1636.

Na segunda metade do sec. XIX, um estudo da autoria de von Bortkiewicz constituiu uma das primeiras aplicações do modelo de Poisson, utilizando-o na descrição do número de mortos por coice de cavalo, por ano, nos regimentos de cavalaria da Prússia motivando a um melhor conhecimento e divulgação deste modelo.

A selecção de candidatos envolvendo a análise do seu perfil psicológico, poderá envolver igualmente conhecimentos de Estatística. Este tipo de análise motivou a evolução de um capítulo da Estatística, denominado Análise de Dados que inclui vários métodos, entre os quais a Análise em Componentes Principais.

Durante a segunda guerra mundial a decifração de códigos quer por parte dos britânicos que por parte dos Americanos levou a melhor conhecimentos dos algoritmos de encriptação e desencriptação e ao desenvolvimento do computador.

No início reservada aos meios académicos, militares e empresariais (no final dos anos 60 algumas empresas como a IBM criam a sua própria rede) aos quais deve o seu

desenvolvimento inicial, em 1992 por decisão do presidente Bush a Internet é aberta aos utilizadores em geral, constituindo um factor fortemente motivador da revolução da informação.

No início, a preocupação era a de que a tecnologia se adaptasse à realidade existente, assistimos hoje a uma mudança de paradigma, é necessário sobretudo que existam boas ideias que logo se encontra a tecnologia adequada. Afirmava Einstein que mais importante que o conhecimento que é finito, é a imaginação que é infinita.

Organização onde não exista abertura ao exterior, espírito de iniciativa, criatividade, que não seja líder, preferindo antes andar atrás dos acontecimentos, sofrerá os efeitos da decadência.

Actualmente a Matemática continua a ter um forte impacto relativamente às necessidades do exército no sentido proporcionar a existência de uma força capaz de obter uma vitória decisiva nos conflitos da Era da Informação. Para atingir esse objectivo será necessário avançar em áreas específicas de aplicação e modelação:

Materiais avançados tais como revestimento de aviões, e sua fabricação;

Comportamento dos materiais sujeitos a pressões elevadas;

Estruturas, incluindo estruturas flexíveis, como sejam a próxima geração de veículos, aviões e pára-quedas;

Fluidos e suas reacções químicas;

Energia;

Micro electrónica;

Sensores;

Controlo e Optimização ao nível do cliente utilizador;

Processamento de Informação;

Simulação interactiva, por exemplo simulação de combates;

Desenho e validação de software;

Reconhecimento automático de alvos;

Sistemas Inteligentes;

Jogos de guerra;

Modelação de sistemas relacionados com combatentes: modelos de comportamento, performance, mobilidade, sujeição a alto stress, camuflagem, protecção química e balística;

Constituem domínios em que actualmente em que os interesses do exército dependem em partes dos avanços da Matemática. As áreas da Matemática nos dias de hoje com maior interesse para o exército são:

Análise Aplicada, procurando modelar equações às diferenças, equações diferenciais, fluidos e dinâmica não linear. O objectivo consiste em otimizar as propriedades ou a performance dos novos materiais, incluindo materiais inteligentes e compostos avançados inspirados na biologia, contribuindo para a protecção das forças militares; modelação das propriedades dos fluidos na combustão, explosão e detonação no ar a altas velocidades relacionados com a dispersão e o transporte de um agente líquido, necessárias à defesa de anti-míssil; dinâmica não linear na óptica, electromecânica e outros fenómenos não lineares utilizados nos sistemas de defesa que utilizam sensores e painéis electrónicos; Modelos matemáticos baseados na dinâmica humana criados para modelar e estudar o soldado como um sistema numa variedade de ambientes.

Matemática Computacional: A evolução do exercito para uma força moderna baseada na tecnologia contribuiu para aumentar a procura de métodos numéricos e de optimização mais seguros, mais estáveis e que dêem resposta às ciências físicas. O objectivo será desenvolver métodos numéricos e processos de optimização para

modelos físicos, biológicos, gestão de recursos e de desenvolver eficientes algoritmos computacionais para os implementar. As áreas chave de aplicação são a já mencionadas dinâmica balística dos fluidos, química computacional, simulação de uma vasta gama de sistemas mecânicos, análise de vulnerabilidade, logística e gestão de recursos. As áreas de investimento em métodos numéricos incluem métodos para resolver de forma eficiente equações diferenciais não lineares, métodos para o fenómeno *shock wave*, na álgebra linear problemas relacionados com o tratamento de forma discreta de modelos contínuos, problemas relacionados com estruturas, como sejam interação e comportamento de estruturas flexíveis como pára-quedas. Optimização não linear, utilizada em larga escala na análise de vulnerabilidade, logística, gestão de recursos e desenho de materiais; Métodos de computação para a dinâmica molecular de centenas de milhões de partículas, necessárias ao desenho de novos materiais; Algoritmos para uma gestão mais rápida e eficiente das redes de comunicação.

Probabilidades e Estatística: A pesquisa neste domínio está sobretudo relacionada com a tomada de decisões em condições de incerteza que incluem a análise estatística e probabilística de modelos para os fenómenos físicos e o desenvolvimento, teste e estimação de procedimentos recorrendo à análise estocástica de sistemas dinâmicos, impulsionando a pesquisa de métodos para análise de observações de fenómenos modelados por estes processos e de métodos numéricos para equações estocásticas diferenciais. As áreas de pesquisa abrangem interação de sistemas de partículas, algoritmos probabilísticos, controle de processos estocásticos, metodologia de simulação, processos espaciais, análise de imagem, métodos de selecção, modelação e análise de informação, reparação de itens em falta ou em falha motiva o estudo da estatística Bayesiana. A análise da composição de materiais sujeitos a altas pressões e temperaturas impulsiona o desenvolvimento da Teoria de Extremos. Para esses materiais existe uma grande variabilidade de tempos de falha pelo que existe a necessidade de recorrer a Métodos Bayesianos no sentido de incorporar o conhecimento físico sobre esses processos. A detecção de campos de minas, no meio de um conflito é importante para as operações do exército. É necessário mais pesquisa no sentido de resolver este problema em áreas da estatística que vão desde os já mencionados modelos Bayesianos aos Modelos Markovianos Aleatórios, Análise de Clusters, Cadeias de Markov e Métodos de Monte Carlo.

Sistemas Inteligentes e Controlo: O esforço nesta área está concentrado sobretudo na modelação, análise, e desenho dos sistemas em *real-time* e controlo de sistemas automáticos incluindo pequenas estruturas como robôs com interação inteligente, sensores remotos, procurando novas formas de integrar tudo num sistema completo. Por exemplo nos hospitais mais automação é necessária nas salas de operações. A tele-operação torna-se relevante para conseguir assistência médica a um soldado numa batalha o mais rapidamente possível. A pesquisa é igualmente necessária para utilizar informação visual nos sistemas de controlo, processamento de imagem, visão computadorizada, caso de armas e veículos de controlo remoto e reconhecimento automático de alvos.

Matemáticas Discretas: A pesquisa neste domínio envolve o desenvolvimento de modelos matemáticos de fenómenos discretos como sejam os requerimentos chave de uma batalha digital incluindo a aquisição em real time, representação, redução e distribuição de vastas quantidades de informação sobre as batalhas: logística, inteligência, informação médica, comando e controlo. Desempenha um papel crucial no sentido de implementar a batalha digital bem como no sentido de analisar as hipóteses alternativas de efectivação das batalhas. Envolve conhecimentos de geometria computacional, álgebra computacional, teoria dos grafos e análise combinatória.

Estes constituem alguns exemplos em que o progresso das ciências militares depende do desenvolvimento da Matemática e citando Agostinho da Silva, formulo um voto de confiança e esperança no futuro:

“ *E ninguém devia deixar de ser criança, e de ser criança a vida inteira.*

Com a informação, cada vez mais em lugar de brincar com os carrinhos de madeira que ele próprio fizesse, brincar, por exemplo, com a alta Matemática, e achar nisso o mesmo gozo de brincar com os carrinhos.”

Tal situação, segundo Freud, terá ocorrido em Leonardo Da Vinci, que no fundo nunca perdeu a sua faceta de criança e em muitos outros que contribuíram para o avanço da ciência e das artes.

Termino com uma quadra do poema de Eugénio Lisboa, *Pitágoras*:

Do número tudo nascia:

Outros números, a verdade,

A curva que o astro seguia,

A beleza, a vida, a cidade.

Bibliografia

Papança, F. (2006). *A Matemática e as Escolas Militares*. Curitiba: Diálogo Educacional(Pontifícia Universidade Católica do Paraná) VI(18) (2006) 135-144.

Papança, F. (2006). *Os Elementos de Euclides e acervo das suas Edições existentes na Biblioteca da Academia Militar*. Lisboa: Proelium VI (3) (2006) 161-165.

Papança, F.(2011) *A Matemática, a Estatística e o Ensino nos Estabelecimentos de Formação de Oficiais do Exército Português no Período 1837-1926: Uma Caracterização*, S. Mamede de Infesta, Edium Editores.

Papança,. F (2019) *Bemposta Palace, Military Academy Museums and Laboratory*" no Recreational Mathematics Colloquium VI: Proceedings of the Recreational Mathematics Colloquium V - G4G (Europe) pp.17.

Papança, F (2019). *Anastácio da Cunha, O Paço da Bemposta, capela e espólio da Biblioteca da Academia Militar; livros de matemática e de estatística utilizados na formação de oficiais do Exército no período de 1640-1926. Revista Militar, II Século - 71º Volume-nº 11. Nº 2614-Novembro de 2019. pp. 1155-1191.*

Papança, F. (2017). *The origins of Mathematics - The Influence of Mathematics in Poetry and Poetry in Mathematics*. Recreational Mathematics Colloquium V: Proceedings of the Recreational Mathematics Colloquium V - G4G (Europe), pp. 227-232, Lisboa: Associação Ludus.

Papança, F. (2017). *The Poetic sense in Mathematical Knowledge*. New York: Journal of Mathematics and System Science 7 (2017) 148-150
Papança, F. (2017). *The origins of Mathematics - The Influence of Mathematics in Poetry and Poetry in Mathematics*. Recreational Mathematics Colloquium V. Lisbon, MUHNAC January, 28-31. Book of abstrats pp. 22.