



## Many Sub Trees k Dots from the Tree Where the Degrees of the Points are Known

---

Efron Manik

EasyChair preprints are intended for rapid dissemination of research results and are integrated with the rest of EasyChair.

February 8, 2021

## Banyak Sub Pohon $k$ Titik dari Pohon yang Derajat Titik-Titiknya Diketahui

Oleh:

Efron Manik

Dosen Universitas HKBP Nommensen

efmanik@gmail.com

### Abstrak

Misalkan  $S$  dan  $T$  merupakan pohon dengan  $|S| = k$ . Notasi  $c(S, T)$  adalah banyaknya copy  $S$  dalam  $T$ . Banyaknya sub pohon dari  $T$  dengan jumlah  $k$  titik dan pengertian banyaknya copy  $S$  pada  $T$  merupakan unsur penting dalam menentukan profil dari pohon secara lokal. Misalkan  $\mathbf{d} = (d_0, d_1, d_2, \dots, d_n)$  adalah barisan tidak naik dari derajat semua titik pada pohon. Himpunan pohon yang derajat titik-titiknya bersesuaian dengan  $\mathbf{d}$  dinotasikan dengan  $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ . Pohon  $T_{\mathbf{d}}^*$  yang bersesuaian dengan  $\mathbf{d}$  dan memiliki jumlah yang maksimum sub pohon dengan  $k$  titik dapat dikonstruksi. Langkah pertama adalah menetapkan titik yang bersesuaian dengan derajat  $d_0$  sebagai akar dari pohon. Sebanyak  $s_1 = d_0$  titik-titik pada level pertama adalah titik-titik yang bersesuaian dengan  $d_0$  suku berikutnya pada barisan derajat. Sebanyak  $s_2 = d_2 + d_3 + \dots + d_{s_1-1} - s_1$  titik-titik pada level kedua yang bersesuaian dengan sebanyak  $s_2$  suku berikutnya pada barisan derajat. Untuk titik-titik pada level ketiga dan selanjutnya dilakukan sama dengan pada level kedua. Pohon  $T_{\mathbf{d}}^*$  adalah pohon yang mempunyai jumlah sub-pohon dengan  $k$  titik terbanyak dari semua pohon pada  $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ .

**Kata Kunci:** pohon, profil, pohon optimal, *well-ordering*.

### LATAR BELAKANG

Graf digunakan untuk menyajikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek. Citra digital dapat disajikan dalam bentuk graf atau graf kisi (*grid*). Algoritma *multiscale graph-based segmentation* (MGS) menggunakan pendekatan populer *graph-cut* yang menyajikan citra digital sebagai graf kisi (Kallasi *et al*, 2015). Citra digital juga dapat dipandang sebagai graf kisi berbobot tak berarah dengan pixel dipandang sebagai titik dan selisih intensitas warna dua pixel yang berdekatan merupakan bobot dari sisi yang menghubungkan dua pixel tersebut (Zhang *et al*, 2015).

Peter (Peter, 2010) menggunakan pendekatan pohon dalam graf untuk mensegmentasi citra digital. Pertama citra digital diubah dalam bentuk graf. Metode *Minimum Spanning Tree* (MST) digunakan untuk membentuk pohon merentang minimum dari graf tersebut. Algoritma Peter menghilangkan sebagian sisi dari pohon merentang minimum yang lebih besar dari *threshold* maka kita akan mendapatkan beberapa sub pohon. Pohon-pohon tersebut merupakan

segmen-segmen dari citra digital. Dalam komputer visi, setiap segmen citra digital kiri dipasang dengan citra digital kanan yang bersesuaian. Cara mencari pasangan tersebut merupakan pekerjaan yang menantang sampai saat ini. Memasangkan pohon yang bersesuaian antara citra kiri dan citra kanan merupakan salah satu alternatif.

Banyak teorema fundamental dalam teori graf dapat dinyatakan sebagai pertaksamaan aljabar antara kepadatan sub-sub graf. Kepadatan graf mungkin dapat digantikan dengan kepadatan homomorfisma (Hatami and Norine, 2011). Dalam bahasa teori model berhingga, masalah suatu tipe dapat dirumuskan sebagai berikut. Misalkan  $T$  adalah teori universal dalam bahasa orde pertama tanpa konstanta atau fungsi simbol. Kemudian setiap himpunan elemen dari model  $T$  akan menginduksi model  $T$ . Untuk dua model hingga  $M$  dan  $N$  dari  $T$  dengan  $|M| < |N|$ , misalkan  $p(M, N)$  adalah banyaknya (kepadatan)  $M$  muncul sebagai sub-model  $N$ . Tetapkan model hingga  $M_1, \dots, M_h$ , dan misalkan ukuran  $N$  bertambah hingga tak terbatas. Hubungan yang bagaimana antara kepadatan  $p(M_1, N), \dots, p(M_h, N)$  yang merupakan syarat perlu untuk limit? Teori ini menarik dibahas dalam berbagai bidang, antara lain: teori graf, digraf, turnamen, hypergraf dll (Razborov, 2007).

### Permasalahan

Misalkan  $S, T$  pohon, banyaknya pohon  $S$  dalam  $T$  yang disimbolkan dengan  $c(S, T)$  adalah banyaknya homomorphism injektif dari  $S$  ke  $T$ . Misalkan  $T_1^k, \dots, T_{N_k}^k$  adalah daftar semua homomorfisma pohon dengan  $k$ -titik. Suatu  $k$ -profil dari pohon  $T$  adalah vektor  $p^{(k)}(T) \in R^{N_k}$  dimana koordinat ke- $i$  berbentuk:

$$\left(p^{(k)}(T)\right)_i = \frac{c(T_i^k, T)}{Z_k(T)}, \text{ dimana } Z_k(T) = \sum_{j=1}^{N_k} c(T_j^k, T).$$

Dengan kata lain suatu  $k$ -profil adalah vektor kepadatan terinduksi dari pohon  $k$ -titik. Kita tertarik dalam pengertian limit himpunan dari  $k$ -profil:

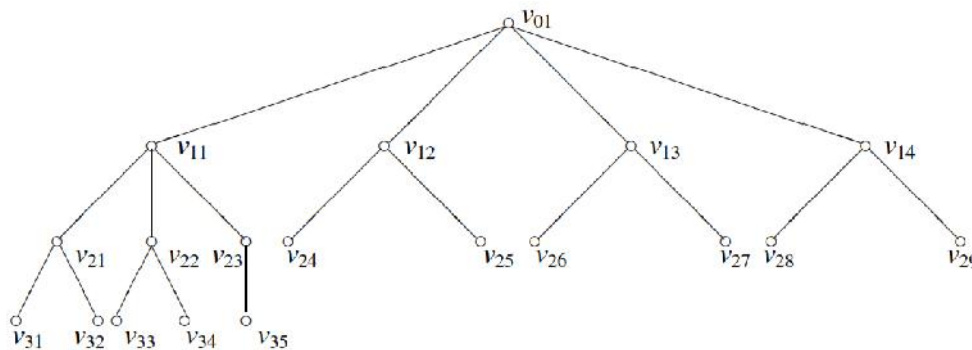
$$\Delta_T(k) = \left\{ p \in R^{N_k} : \exists (T_n), |T_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty, \text{ dan } p^{(k)}(T_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p \right\},$$

dimana  $|T|$  adalah banyak titik dalam  $T$ .  $Z_k(T)$  merupakan banyaknya sub pohon  $k$  titik dari pohon  $T$  (Czabarka, 2015). Permasalahan yang dibahas dalam tulisan ini adalah bagaimana menentukan banyak jumlah yang maksimum sub pohon  $k$  titik dari pohon  $T$ .

## KAJIAN PUSTAKA

Suatu graf  $G=(V, E)$  tidak berarah tanpa siklus disebut **hutan**. Hutan tersambung disebut **pohon**. Titik berderajat satu pada pohon disebut **daun**. **Bintang** adalah pohon yang hanya memiliki paling banyak satu titik yang bukan daun. Setiap graf tersambung  $G$  mempunyai pohon merentang. Misalkan  $G$  graf dengan  $n$  titik,  $P$  matriks tetangga, and  $J$  matriks kuadrat yang semua unsumnya bernilai 1. Jumlah pohon merentang dari graf  $G$  adalah  $\tau(G) = \det(J + PP^t)/n^2$ . Misalkan  $T=(V, E)$  pohon  $r \in V$  disebut **akar** jika untuk setiap  $t \in V$  ada lintasan dari  $t$  menuju  $r$ .

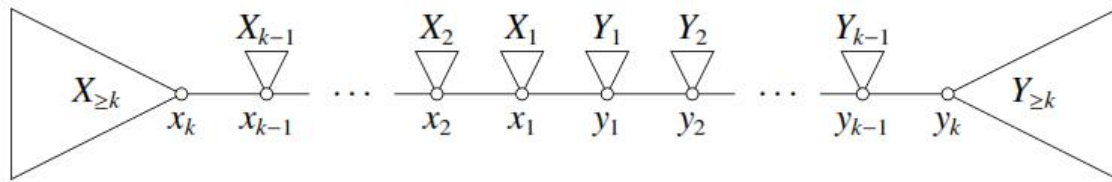
Untuk barisan bilangan bulat positif tidak naik  $\mathbf{d} = (d_0, d_1, \dots, d_{n-1})$  dengan  $n \geq 3$ , misalkan notasi  $\mathcal{A}$  adalah himpunan semua pohon dengan derajat titik-titiknya bersesuaian dengan barisan  $\mathbf{d}$ . Kita dapat mengkonstruksi  $T_d^* \in \mathcal{A}$  dengan cara seperti berikut ini. Pertama, titik dengan derajat terbesar  $d_0$  dilabelkan dengan  $v_{01}$  (sebagai akar). Kedua, tetangga dari  $v_{01}$  dilabelkan dengan  $v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1d_0}$  dengan derajat titik-titiknya berturut-turut dari kiri ke kanan  $d(v_{1i}) = d_i$  untuk  $i = 1, 2, \dots, d_0$ . Tetangga selanjutnya dari  $v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1d_0}$  sebanyak  $(d(v_{11}) - 1) + (d(v_{12}) - 1) + \dots + (d(v_{1d_0}) - 1)$  titik dilabelkan kembali, serta demikian selanjutnya sesuai urutan barisan derajat titik pohon (Zhang, 2013). Contoh, misalkan  $\mathbf{d} = (4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$  maka pohon  $T_d^*$  dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Pohon  $T_d^*$

Beberapa istilah akan disajikan antara lain:  $T(v)$  adalah semua sub pohon dari  $T$  yang akarnya  $v$ ,  $dist(x, y)$  adalah banyaknya sisi yang menghubungkan titik  $x$  dan  $y$ ,  $h(v) = dist(v_0, v)$  dimana  $v_0$  akar dari pohon,  $f_T(v_1, v_2, \dots, v_m)$  adalah jumlah sub pohon dari  $T$  yang memuat titik-titik  $v_1, v_2, \dots, v_m$ ,  $f_{T,k}(v_1, v_2, \dots, v_m)$  adalah jumlah sub pohon  $k$  titik dari  $T$  yang memuat titik-titik  $v_1, v_2, \dots, v_m$ , dan  $\{T\}$  adalah banyaknya sub pohon tidak kosong dari  $T$ . Misalkan  $W$  pohon dan  $x, y$  dua titik dari  $W$ . Lintasan  $P_W(x, y)$  dari  $x$  ke  $y$  dapat dinotasikan dengan  $x_m \dots x_2 x_1 y_1 y_2 \dots y_m$  jika

$dist(x, y)$  ganjil atau  $x_m \dots x_2 x_1 z y_1 y_2 \dots y_m$  jika  $dist(x, y)$  genap, dimana  $x_m \equiv x$  dan  $y_m \equiv y$ . Misalkan  $G$  graf yang dihasilkan dari pohon  $W$  dengan cara menghapus semua sisi pada lintasan  $P_W(x, y)$ . Komponen-komponen tersambung (dalam  $G$ ) yang memuat  $x_i, y_i$  dan  $z$  dinotasikan dengan  $X_i, Y_i$ , dan  $Z$  berturut-turut untuk  $i = 1, 2, \dots, m$ . Notasi  $X_{\geq k}$  adalah komponen tersambung dari  $W$  yang memuat  $x_k$  setelah sisi  $x_{(k-1)}x_k$  dihapus, dan  $Y_{\geq k}$  adalah komponen tersambung dari  $W$  yang memuat  $y_k$  setelah sisi  $y_{(k-1)}y_k$  dihapus untuk  $k = 1, 2, \dots, m$ . Gambar 2 menunjukkan cara pelabelan berseuaian dengan lintasan  $P_W(x, y)$ .



Gambar 2. Pelabelan Komponen-Komponen dari Lintasan  $P_W(x, y)$

**Definisi 1.** Misalkan  $T = (V, E)$  pohon dengan akar  $v_0$ . Suatu *well-ordering*  $<$  dari titik-titik disebut terurut-BFS jika  $<$  memenuhi sifat-sifat berikut:

- 1) Jika  $u, v \in V$ , dan  $u < v$ , maka  $h(u) \leq h(v)$  dan  $d(u) \geq d(v)$ ;
- 2) Jika ada dua sisi  $uu_1 \in E(T)$  dan  $vv_1 \in E(T)$  sedemikian sehingga  $u < v$ ,  $h(u) = h(u_1) - 1$  dan  $h(v) = h(v_1) - 1$ , maka  $u_1 < v_1$ .

Beberapa hal yang menarik dalam lintasan yang ada akan diperlihatkan pada beberapa lemma berikut ini. Pertama, kita akan membahas hubungan antara lintasan dan jumlah sub-sub pohon.

**Lemma 2.** Misalkan  $P$  lintasan pada pohon optimal  $T$  dalam yang mempunyai titik-titik ujungnya merupakan daun.

- 1) Jika panjang  $P$  adalah  $(2m - 1)$  ganjil, maka titik-titik dari  $P$  dapat dilabelkan sebagai  $x_m \dots x_2 x_1 y_1 y_2 \dots y_m$  sedemikian sehingga

$$f_{X_1}(x_1) \geq f_{Y_1}(y_1) \geq f_{X_2}(x_2) \geq f_{Y_2}(y_2) \geq \dots \geq f_{X_m}(x_m) \geq f_{Y_m}(y_m) = 1$$

- 2) Jika panjang  $P$  adalah  $2m$  genap, maka titik-titik dari  $P$  dapat dilabelkan sebagai  $x_{(m+1)} x_m \dots x_2 x_1 y_1 y_2 \dots y_m$  sedemikian sehingga

$$f_{X_1}(x_1) \geq f_{Y_1}(y_1) \geq f_{X_2}(x_2) \geq f_{Y_2}(y_2) \geq \dots \geq f_{X_m}(x_m) \geq f_{Y_m}(y_m) = f_{X_{m+1}}(x_{m+1}) = 1$$

Lemma berikut akan membahas kasus tertentu dari lemma di atas.

**Lemma 3.** (i) Jika Lemma 2 kasus 1) dipenuhi maka

$$f_T(x_1) \geq f_T(y_1) > f_T(x_2) \geq f_T(y_2) > \dots > f_T(x_m) \geq f_T(y_m) = 1.$$

Selanjutnya, jika  $f_T(x_k) = f_T(y_k)$  untuk suatu  $1 \leq k \leq m$ , maka  $f_T(x_i) = f_T(y_i)$  untuk  $i = k, \dots, m$ .

(ii) Jika Lemma 2 kasus 2) dipenuhi maka

$$f_T(x_1) > f_T(y_1) \geq f_T(x_2) > f_T(y_2) \geq \dots \geq f_T(x_m) > f_T(y_m) \geq f_T(x_{m+1}).$$

Selanjutnya, jika  $f_T(y_k) = f_T(x_{k+1})$  untuk suatu  $1 \leq k \leq m$ , maka  $f_T(y_i) = f_T(x_{i+1})$  untuk  $i = k, \dots, m$ .

Selanjutnya hubungan antara derajat suatu titik dan banyak sub pohon yang melewati titik tersebut akan dibahas pada lemma berikut ini.

**Lemma 4.** Untuk suatu lintasan  $P(x_m, y_m) = x_m \dots x_2 x_1(z) y_1 y_2 \dots y_m$  dalam suatu pohon optimal  $T$ , jika  $f_{x_i}(x_i) \geq f_{y_i}(y_i)$  untuk  $i = 1, \dots, k$ ,  $1 \leq k \leq m - 1$ , maka  $d(x_k) \geq d(y_k)$ .

Selanjutnya, jika  $f_{x_i}(x_i) = f_{y_i}(y_i)$  untuk  $i = 1, \dots, k$ ,  $1 \leq k \leq m - 1$ , maka  $d(x_k) = d(y_k)$ .

Lemma berikut akan memperlihatkan hubungan antara maksimum derajat suatu titik dan jumlah yang maksimum sub pohon yang melewati titik tersebut.

**Lemma 5.** Misalkan  $T$  pohon optimal dalam  $\mathcal{T}_d$ . Jika  $f_T(v_0) = \max \{f_T(v) \mid v \in V(T)\}$ , maka  $d(v_0) = \max \{d(v) \mid v \in V(T)\}$ .

**Bukti:** Karena jelas terlihat untuk pohon kecil, jadi misalkan  $|V(T)| \geq 4$ . Andaikan  $d(v_0) < \max \{d(v) \mid v \in V(T)\}$ . Maka ada suatu titik  $w$  sedemikian sehingga  $d(v_0) < d(w)$ . Dengan menggunakan Teorema Székely (2005) bahwa  $f_T(v)$  adalah maksimum pada satu titik atau dua titik bertetangga dari  $T$ . Jadi diperoleh  $f_T(v_0) > f_T(v)$  untuk  $v \in V(T) \setminus \{v_0\}$ , atau  $f_T(v_0) = f_T(v_1) > f_T(v)$  untuk  $v \in V(T) \setminus \{v_0, v_1\}$  dan  $v_0 v_1 \in E(T)$ .

**Kasus 1:**  $f_T(v_0) > f_T(v)$  untuk  $v \in V(T) \setminus \{v_0\}$ . Karena  $f_T(v_0) > f_T(w)$ , mudah dilihat bahwa  $v_0$  bukan daun. Misalkan  $P$  lintasan yang memuat  $v_0$  dan  $w$  yang ujung-ujungnya daun. Misalkan lintasan  $P$  dengan panjang  $(2m - 1)$ . Maka menurut Lemma 2, titik-titik pada  $P$  dapat dilabelkan sebagai  $P = x_m \dots x_2 x_1(z) y_1 y_2 \dots y_m$  sedemikian sehingga

$$f_{x_1}(x_1) \geq f_{y_1}(y_1) \geq f_{x_2}(x_2) \geq f_{y_2}(y_2) \geq \dots \geq f_{x_m}(x_m) \geq f_{y_m}(y_m) = 1.$$

Selanjutnya dengan Lemma 3, diperoleh

$$f_T(x_1) \geq f_T(y_1) > f_T(x_2) \geq f_T(y_2) > \dots > f_T(x_m) \geq f_T(y_m).$$

Oleh karenanya  $x_1$  harus menjadi  $v_0$  dan  $w$  harus menjadi  $x_k$  untuk  $2 \leq k \leq m$ , atau  $y_j$  untuk  $1 \leq j \leq m$ . Dengan Lemma 4, diperoleh  $d(v_0) = d(x_1) \geq d(x_k) = d(w)$  atau  $d(v_0) = d(x_1) \geq d(y_j) = d(w)$ , kontradiksi. Sehingga terbukti.

**Kasus 2:**  $f_T(v_0) = f_T(v_1) > f_T(v)$  untuk  $v \in V(T) \setminus \{v_0, v_1\}$  dan  $v_0v_1 \in E(T)$ . Jika  $w = v_1$ , maka menurut Lemma 4, diperoleh  $d(w) = d(v_1) = d(v_0) < d(w)$ , kontradiksi.

Oleh karenanya kita mengasumsikan  $w \neq v_1$ . Pertama dicatat bahwa  $v_0$  dan  $v_1$  bukan daun. Misalkan  $P$  lintasan yang memuat  $v_0, v_1$ , dan  $w$  dengan ujung-ujungnya daun. Misalkan  $(2m - 1)$  panjang  $P$  (cara yang sama untuk bilangan genap), maka menurut Lemma 2, titik-titik lintasan  $P$  dapat dilabelkan dengan  $P = x_m \dots x_2 x_1(z) y_1 y_2 \dots y_m$  sedemikian sehingga

$$f_{x_1}(x_1) \geq f_{y_1}(y_1) \geq f_{x_2}(x_2) \geq f_{y_2}(y_2) \geq \dots \geq f_{x_m}(x_m) \geq f_{y_m}(y_m) = 1.$$

Selanjutnya dengan Lemma 3, diperoleh

$$f_T(x_1) \geq f_T(y_1) > f_T(x_2) \geq f_T(y_2) > \dots > f_T(x_m) \geq f_T(y_m).$$

Oleh karenanya  $\{x_1, y_1\} = \{v_0, v_1\}$  dan  $w$  harus menjadi  $x_k$  atau  $y_k$  untuk  $1 < k < m$ . Dengan Lemma 4 diperoleh  $d(v_0) \geq d(w)$  dan  $d(v_1) \geq d(w)$ , kontradiksi.

Dari kombinasi Kasus 1 dan Kasus 2, Lemma 5 terbukti.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Suatu titik yang dilalui oleh paling banyak sub pohon dari pohon optimal mempunyai keistimewaan. Keistimewaannya akan dibahas dalam lemma berikut ini.

**Lemma 6.** Misalkan  $T$  pohon optimal dalam  $\mathcal{T}$ . Jika ada suatu lintasan  $P = u_1 \dots u_2 u_1 v_0 v_1 v_2 \dots v_k$  dengan  $f_T(v_0) = \max \{f_T(v) \mid v \in V(P)\}$ ,  $f_T(u_1) \geq f_T(v_1)$ , dan  $l = k$  (atau  $l = k + 1$ ), maka

$$f_T(u_1) \geq f_T(v_1) \geq \dots \geq f_T(u_k) \geq f_T(v_k) \quad (\text{atau } \geq f_T(u_{k+1}))$$

dan

$$d(u_1) \geq d(v_1) \geq \dots \geq d(u_k) \geq d(v_k) \quad (\text{atau } \geq d(u_{k+1})).$$

**Akibat 7.** Jika ada suatu lintasan  $P = u_k \dots u_2 u_1 w v_1 v_2 \dots v_k$  dengan  $\text{dist}(u_k, v_0) = \text{dist}(v_k, v_0) = \text{dist}(w, v_0) + k$  dan  $f_T(u_1) \geq f_T(v_1)$ , dan  $l = k$  (atau  $l = k + 1$ ), maka

$$f_T(u_1) \geq f_T(v_1) \geq \dots \geq f_T(u_k) \geq f_T(v_k)$$

dan

$$d(u_1) \geq d(v_1) \geq \dots \geq d(u_k) \geq d(v_k).$$

Jika ada suatu lintasan  $P = u_{k+1} \dots u_2 u_1 w v_1 v_2 \dots v_k$  dengan  $dist(u_{k+1}, v_0) = dist(v_k, v_0) = dist(w, v_0) + 1$  dan  $f_T(u_1) \geq f_T(v_1)$ , dan  $l = k$  (atau  $l = k + 1$ ), maka

$$f_T(u_1) \geq f_T(v_1) \geq \dots \geq f_T(u_k) \geq f_T(v_k) \geq f_T(u_{k+1})$$

dan

$$d(u_1) \geq d(v_1) \geq \dots \geq d(u_k) \geq d(v_k) \geq d(u_{k+1}).$$

Dengan menggunakan sifat *ordering-BFS* dan beberapa lemma di atas teorema yang menunjukkan pohon  $T_d^*$  adalah pohon optimal dalam  $\mathcal{T}$  akan dibuktikan.

**Teorema 8.** Misalkan  $d$  barisan derajat titik yang tidak turun. Pohon  $T_d^*$  pada Gambar 1 adalah pohon yang mempunyai jumlah sub-pohon terbanyak dari semua pohon pada  $\mathcal{T}_d$ .

**Bukti:** Menurut Lemma 5, ada titik  $v_0$  sedemikian sehingga  $f_T(v_0) = \max \{f_T(v) \mid v \in V(T)\}$  dan  $d(v_0) = \max \{d(v) \mid v \in V(T)\}$ . Misalkan  $v_0$  akar dari pohon  $T$  dan tetapkan  $V_i = \{v \mid dist(v, v_0) = i\}$  untuk  $i = 0, \dots, p+1$  dengan  $V(T) = \cup_{i=0}^{p+1} V_i$ . Misalkan  $s_i = |V_i|$  untuk  $i = 0, \dots, p+1$ . Selanjutnya titik-titik pada  $V(T)$  dapat dilabelkan dengan metode rekursi. Untuk  $V_0$  dilabelkan dengan  $v_0$  sebagai  $v_{01}$  akar dari pohon  $T$ . Titik-titik dari  $V_1$  (memuat semua tetangga dari  $v_{01}$ ) yang dilabelkan sebagai  $v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1,s_1}$  yang memenuhi:

$$f_T(v_{11}) \geq f_T(v_{12}) \geq \dots \geq f_T(v_{1,s_1})$$

dan

$$f_T(v_{1i}) \geq f_T(v_{1j}) \text{ mengakibatkan } d(v_{1i}) \geq d(v_{1j}) \text{ untuk } 1 \leq i < j \leq s_i.$$

Secara umum, semua titik-titik dari  $V_i$  dilabelkan sebagai  $\{v_{i1}, \dots, v_{i,s_i}\}$  untuk  $i = 1, \dots, t$ . Sekarang perhatikan semua titik-titik dalam  $V_{t+1}$ . Karena  $T$  adalah pohon, mudah melihat bahwa  $s_1 = d(v_{01})$  dan

$$s_{t+1} = |V_{t+1}| = d(v_{t1}) + \dots + d(v_{t,s_t}) - s_t.$$

Karena untuk  $1 \leq r \leq s_t$ , semua tetangga dalam  $V_{t+1}$  dari  $v_{tr}$  dilabelkan sebagai

$$v_{t+1, d(v_{t1}) + \dots + d(v_{t(r-1)}) - (r-1) + 1}, \dots, v_{t+1, d(v_{t1}) + \dots + d(v_{tr}) - r}$$

dan memenuhi kondisi



$$f_T(v_{t+1,i}) \geq f_T(v_{t+1,j}) \quad (1)$$

dan

$$f_T(v_{t+1,i}) = f_T(v_{t+1,j}) \text{ mengakibatkan } d(v_{t+1,i}) = d(v_{t+1,j}) \quad (2)$$

untuk  $d(v_{t1}) + \dots + d(v_{t,r-1}) - (r-1) + 1 \leq i < j \leq d(v_{t1}) + \dots + d(v_{t,r}) + 1$ .

Dalam hal ini, kita melabelkan  $V(T) = \cup_{i=0}^{p+1} V_i$ . Oleh karena itu kita mampu mendefinisikan suatu *well-ordering* dari titik-titik dalam  $V(T)$  sebagai berikut:

$$v_{ik} < v_{jl}, \text{ jika } 0 \leq i < j \leq p+1 \text{ atau } i = j \text{ dan } 1 \leq k < l \leq s_i. \quad (3)$$

Kita selanjutnya membuktikan *well-ordering* ini adalah *ordering-BFS*. Dengan kata lain,  $T$  adalah isomorfik pada  $T_d^*$ . Pertama, pertidaksamaan berikut akan dibuktikan berlaku untuk  $t = 0, \dots, p+1$ .

$$f_T(v_{t1}) \geq f_T(v_{t2}) \geq \dots \geq f_T(v_{t,s_t}) \geq f_T(v_{t+1,1}) \quad (4)$$

dan

$$d(v_{t1}) \geq d(v_{t2}) \geq \dots \geq d(v_{t,s_t}) \geq d(v_{t+1,1}) \quad (5)$$

Untuk sebarang dua  $v_{ti}$  dan  $v_{tj}$  dengan  $1 \leq i < j \leq s_t$ , ada lintasan  $P = v_{ti} \dots v_{k+1,l} w_k v_{k+1,r} \dots v_{tj}$  dengan  $l < r$ , dimana  $dist(v_{ti}, v_{01}) = dist(v_{tj}, v_{01}) = dist(w_k, v_{01}) + t - k$ . Maka kita peroleh  $f_T(v_{k+1,l}) \geq f_T(v_{k+1,r})$ ,  $f_T(v_{ti}) \geq f_T(v_{tj})$  sesuai Akibat 7. Di pihak lain, kita memikirkan lintasan  $Q = v_{t+1,1} v_{t1} \dots v_{11} v_{01} v_{1s_1} \dots v_{1s_t}$ , maka  $f_T(v_{t,s_t}) \geq f_T(v_{t+1,1})$  dan  $d(v_{t,s_t}) \geq d(v_{t+1,1})$  sesuai Akibat 7. Oleh karena persamaan (4) dan (5) dipenuhi untuk  $t = 0, \dots, p+1$  maka

$$f_T(v_{01}) \geq f_T(v_{11}) \geq \dots \geq f_T(v_{1,s_1}) \geq f_T(v_{21}) \geq \dots \geq f_T(v_{2,s_2}) \geq \dots \geq f_T(v_{p+1,s_{p+1}}) \quad (6)$$

dan

$$d(v_{01}) \geq d(v_{11}) \geq \dots \geq d(v_{1,s_1}) \geq d(v_{21}) \geq \dots \geq d(v_{2,s_2}) \geq \dots \geq d(v_{p+1,s_{p+1}}). \quad (7)$$

Dari (3), (6), dan (7) terlihat bahwa *well-ordering* ini memenuhi semua syarat dalam Definisi 1. Oleh karenanya  $T$  mempunyai *ordering-BFS*. Jadi dengan Proposisi 2.2 (dalam Zhang, 2008),  $T$  adalah isomorfik pada  $T_d^*$ . Jadi  $T_d^*$  adalah pohon optimal yang unik dalam  $\mathcal{A}$  yang mempunyai jumlah terbesar sub-pohon.

Teorema di atas yang telah dibuktikan berlaku juga untuk sub pohon yang diperhatikan hanya sub pohon dengan  $k$  titik.

**Teorema 9.** Misalkan  $\mathbf{d}$  barisan derajat titik yang tidak turun. Pohon  $T_d^*$  adalah pohon yang mempunyai jumlah sub-pohon dengan  $k$  titik terbanyak dari semua pohon pada  $\mathcal{A}_d$ .

**Bukti:** Misalkan barisan bilangan bulat positif tidak naik  $\mathbf{d} = (d_0, d_1, \dots, d_{n-1})$  dengan  $n \geq 3$  adalah barisan dari derajat titik-titik himpunan pohon  $\mathcal{A}_d$ . Ambil sebarang pohon  $T \in \mathcal{A}_d$ . Misalkan titik  $v_0$  sedemikian sehingga  $f_T(v_0) = \max \{f_T(v) \mid v \in V(T)\}$  dan  $d(v_0) = \max \{d(v) \mid v \in V(T)\}$ . Sehingga titik  $v_0 \in V(T)$  yang  $f_{T,k}(v_0) = \max \{f_{T,k}(v) \mid v \in V(T)\}$  dan  $d(v_0) = d_0$ . Misalkan  $V_1 = \{v \in V(T) \mid \text{dist}(v_0, v) = 1\}$ . Misalkan  $v_1 \in V(T)$  sedemikian sehingga  $f_{T,k}(v_1) = \max \{f_{T,k}(v) \mid v \in V(T) \setminus \{v_0\}\}$ . Sehingga  $d(v_1) = d_1$ . Jika titik  $v_1 \notin V_1$  maka sub pohon dengan akar  $v_1$  dipertukarkan dengan titik dalam  $V_1$  yang berderajat paling kecil. Jadi Pohon baru yang terbentuk mempunyai lebih banyak sub pohon yang memiliki  $k$  titik dari pohon  $T$  karena sub pohon yang akar  $v_0$  dengan menghilangkan satu titik akan menjadi sub pohon  $k$  titik yang memuat  $v_0$  dan  $v_1$ . Susunan pohon yang baru ini untuk titik  $\{v_0\} \cup V_1$  akan berbentuk pohon  $T_d^*$ . Dengan cara yang sama dilakukan untuk titik dalam  $V_i = \{v \in V(T) \mid \text{dist}(v_0, v) = i\}$ . Sehingga pohon  $T_d^*$  mempunyai jumlah sub-pohon dengan  $k$  titik lebih banyak dari pohon  $T$ .

## KESIMPULAN

Metode pohon merentang minimum, *Minimum Spanning Tree* (MST), dapat digunakan untuk mensegmentasi citra digital. Dalam komputer visi, setiap segmen citra digital kiri dipasangkan dengan citra digital kanan yang bersesuaian. Cara mencari pasangan tersebut merupakan pekerjaan yang menantang sampai saat ini. Memasangkan sub-pohon yang bersesuaian antara citra kiri dan citra kanan merupakan salah satu alternatif.

Misalkan  $S$  dan  $T$  merupakan pohon dengan  $|S| = k$ . Notasi  $c(S, T)$  adalah banyaknya copy  $S$  dalam  $T$ . Banyaknya sub pohon dari  $T$  dengan jumlah  $k$  titik dan pengertian banyaknya copy  $S$  pada  $T$  merupakan unsur penting dalam menentukan profil dari pohon secara lokal. Misalkan  $\mathbf{d} = (d_0, d_1, d_2, \dots, d_n)$  adalah barisan tidak naik dari derajat semua titik pada pohon. Himpunan pohon yang derajat titik-titiknya bersesuaian dengan  $\mathbf{d}$  dinotasikan dengan  $\mathcal{A}_d$ . Pohon  $T_d^*$  yang bersesuaian dengan  $\mathbf{d}$  dan memiliki jumlah yang maksimum sub pohon dengan  $k$  titik dapat dikonstruksi. Langkah pertama adalah menetapkan titik yang bersesuaian dengan derajat  $d_0$  sebagai akar dari pohon. Sebanyak  $s_1 = d_0$  titik-titik pada level pertama adalah titik-titik yang bersesuaian dengan  $d_0$  suku berikutnya pada barisan derajat. Sebanyak  $s_2 = d_2 + d_3 + \dots + d_{s_1-1} - s_1$

titik-titik pada level kedua yang bersesuaian dengan sebanyak  $s_2$  suku berikutnya pada barisan derajat. Untuk titik-titik pada level ketiga dan selanjutnya dilakukan sama dengan pada level kedua. Pohon  $T_d^*$  adalah pohon yang mempunyai jumlah sub-pohon dengan  $k$  titik terbanyak dari semua pohon pada  $\mathcal{A}$ .

## DAFTAR PUSTAKA

- Czabarka, É., Székely, L. A., & Wagner, S. (2015). Paths vs. stars in the local profile of trees. arXiv preprint arXiv:1512.06526.
- Hatami, H. and S. Norine. (2011). Undecidability Of Linear Inequalities In Graph Homomorphism Densities. *Journal Of The American Mathematical Society*, 24(2): 547–565
- Kallasi, F., D.L. Rizzini, F. Oleari, and J. Aleotti. (2015). Computer Vision in Underwater Environments: a Multiscale Graph Segmentation Approach. *Proceeding of the OCEANS 2015-Genova*. IEEE. p. 1-6.
- Korte, B. and J. Vygen. (2006). *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms, Third Edition*. Springer, Germany
- Peter, S.J. (2010). Minimum Spanning Tree-based Structural Similarity Clustering for Image Mining with Local Region Outliers. *IJCA Vol. 8(6)*, p. 0975–8887.
- Razborov, A.A. (2007). Flag Algebras. *Journal Symbolic Logic* ,72: 1239–1282.
- Rosen, K. H. (2007). *Discrete Mathematics and its applications, 6th ed.* McGraw-Hill.
- Székely, L. A. and H. Wang. (2005). On subtrees of trees. *Advances.in Applied Mathematics*, 34:138–155.
- Winston, W.L. (2004). *Operations Research: Applications and Algorithms, Fourth Edition*. USA: Thomson
- Zhang, F., L.D. S. Xiang, and X. Zhang . (2015). Segment Graph Based Image Filtering: Fast Structure-Preserving Smoothing. *Proceeding of the IEEE ICCV*. p. 361-369.
- Zhang, X. D. (2008). The Laplacian spectral radii of trees with degree sequences. *Discrete Mathematics* 308: 3143–3150.
- Zhang, X. M., Zhang, X. D., Gray, D., & Wang, H. (2013).The number of subtrees of trees with given degree sequence. *Journal of Graph Theory*, 73(3), 280-295